ცალკე ამონაბეჭდი
Отдельный оттиск

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე

СООБЩЕНИЯ
АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

BULLETIN
OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE GEORGIAN SSR

1926, № 1, აპრილი, 1987

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 126, № 2, 1987
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, 126, № 2, 1987
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, 126, № 2, 1987

УДК 512.552.6

МАТЕМАТИКА

Б. Н. МЕСАБЛИШВИЛИ

СТРУКТУРА СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР РАДИКАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ СВЯЗНОГО КОММУТАТИВНОГО КОЛЬЦА

(Представлено членом-корреспондентом Академии Х. Н. Инасаридзе 22.10.1985)

В работе [1] изучается структура подрасширений радикального расширения полей. В настоящей статье утверждения из [1] обобщены на случай расширений связного, т. е. не имеющего нетривиальных идемпотентов, коммутативного кольца.

Пусть R — связное коммутативное кольцо, a — элемент кольца R и m — натуральное число. Если a и m обратимы в R, то полином $t^m - a \in R[t]$ является сепарабельным [2]. Ниже будем предполагать, что $\mathrm{char}(R)$ не делит m и полином $t^m - a \in R[t]$ сепарабельный и неприводим над R. Введем следующие обозначения: $\overline{R}$ — сепарабельное замыкание кольца R, ξ_m — примитивный корень из единицы степени m, α — некоторый корень полинома $t^m - a \in R[t]$ в $\overline{R}$, $R(\alpha)$ — подкольцо в $\overline{R}$, порожденное множеством $R \cup \{\alpha\}$. Поскольку α — корень сепарабельного полинома, поэтому кольцо $R(\alpha)$ является строго сепарабельной R-алгеброй. Кроме того, любая сепарабельная R-подалгебра в $R(\alpha)$ является также строго сепарабельной R-алгеброй [2].

Как и в случае полей [1, 3] введем следующие определения.

Определение 1. Пусть R — коммутативное кольцо и A — расширение кольца R, которое является строго сепарабельной R — алгеброй. Если для любого натурального числа k, которое делит число $\mathrm{rang}_R(A)$, существует единственная сепарабельная R-подалгебра с рангом k, то будем говорить, что расширение колец $A \supset R$ обладает свойством единственности сепарабельной R-подалгебры.

Определение 2. Полином $t^m - a \in R[t]$ называется нормальным над R, если его кольцом разложения [2] является кольцо $R(\alpha)$, где α — произвольный корень этого полинома в $\overline{R}$.

Нижеследующие теоремы дословно повторяют соответствующие утверждения из [1]. Тем самым можно считать, что все основные результаты из [1] обобщены на случай связных коммутативных колец.

Теорема 1. *Расширение колец $R(\alpha) \supset R$ обладает свойством единственности сепарабельной R-подалгебры тогда и только тогда, когда для всех простых чисел p, делящих m, имеет место следующее: $\xi_p \notin R(\alpha) \setminus R$.*

Положим $n = \max\{k \in \mathbf{N} \mid k$ делит m и $\xi_k \in R(\alpha)\}$.

Теорема 2. *Расширение колец $R(\alpha) \supset R(\xi_n)$ обладает свойством единственности сепарабельной $R(\xi_n)$-подалгебры.*

Заметим, что теорема 2 является обобщением того утверждения, что при $\xi_m \in R$ расширение колец $R(\alpha) \supset R$ обладает свойством единственности сепарабельной R-подалгебры. А это утверждение вытекает из того, что при $\xi_m \in R$, $R(\alpha)$ является расширением Галуа кольца R с циклической группой Галуа.

Пусть A — строго сепарабельная R-алгебра, которая является расширением кольца R. Через $C(A/R, k)$ обозначим количество сепарабельных R-подалгебр в A с рангом k. Кроме того положим

$$\omega(A, k) = \mathrm{card}\,\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant k, \ \ \xi_k^i \in A\}.$$

Теорема 3. *Пусть p^l делит m, где p — простое, а l — некоторое натуральное число. Тогда*

1. *Если* $\xi_p \notin R(\alpha) \setminus R$, *то* $C(R(\alpha)/R, p^l) = 1$.
2. *Если* $\xi_p \in R(\alpha) \setminus R$, *то* $C(R(\alpha)/R, p^l) = \omega(R(\alpha), p^l)$.

Пусть N — максимальная сепарабельная и нормальная R-подалгебра в $R(\alpha)$.

Теорема 4. *Пусть k делит m и $(k, n) = d$, где $n = \mathrm{rang}_R(N)$. Тогда*

$$C(R(\alpha)/R, d) = C(R(\alpha)/R, k) = C(N/R, d).$$

Рассмотрим случай, когда $m = 2^l$.

Пусть G группа со свойством $(G:1) = 2^l$, $G = \langle x, y\rangle$ и $\langle x\rangle$ является циклической подгруппой порядка 2^{l-1}. Тогда с точностью до изоморфизма G является группой следующего типа:

I. $l \geqslant 3, \quad x^{2^{l-1}} = 1, \quad y^2 = x^{2^{l-2}}, \quad yxy = x^{-1}.$

II. $l \geqslant 3, \quad x^{2^{l-1}} = 1, \quad y^2 = 1, \quad yxy = x^{-1}.$

III. $l \geqslant 4, \quad x^{2^{l-1}} = 1, \quad y^2 = 1, \quad yxy = x^{2^{l-2}-1}.$

IV. $l \geqslant 4, \quad x^{2^{l-1}} = 1, \quad y^2 = 1, \quad yxy = x^{2^{l-2}+1}.$

Теорема 5. *Пусть полином $t^{2^l} - a \in R[t]$ нормальный и G — группа Галуа расширения $R(\alpha) \supset R$. Тогда*

1. *Если G есть группа* IV *типа, то* $C(R(\alpha)/R, 2^k) = 3$ *для* $1 \leqslant k \leqslant l-1$.
2. *Если G есть группа* I, II *или* III *типа, то* $C(R(\alpha)/R, 2^k) = 2^{k+1}$ *для* $1 \leqslant k \leqslant l-2$.
3. *Если G есть группа* I *типа, то* $C(R(\alpha)/R, 2^{l-1}) = 1$.
4. *Если G есть группа* II *типа, то* $C(R(\alpha)/R, 2^{l-1}) = 2^{l-1} + 1$.
5. *Если G есть группа* III *типа, то* $C(R(\alpha)/R, 2^{l-1}) = 2^{l-2} + 1$.

Как и в случае полей [1], положим

$A = \max\{i \mid \xi_{2^i} \in R\}$ и $T = \max\{i \mid \xi_{2^i} + \xi_{2^i}^{-1} \in R\}$.

Пусть $p(t) \in R[t]$ — сепарабельный полином и $R_{(p)}$ — его кольцо разложения. Через $\mathrm{Gal}(p(t))$ обозначаем группу Галуа расширения $R_{(p)} \supset R$.

Теорема 6. *Пусть $l \geqslant 3$. Тогда полином $t^{2^l} - a \in R[t]$ является нормальным над R тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. $\xi_4 \in R$, $l \leqslant A$ *и* $a \notin R^2$.

В этом случае $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a) = Z_{2^l}$.

2. $\xi_4 \in R$, $l > A$ *и* $a = b^2 c^{2^{l-A}} \xi_{2^A}$, *где* $b, c \in R$.

В этом случае $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a) = Z_{2^l}$.

3. $\xi_4 \notin R$, $T = 2$ и $\sqrt{-2} \notin R$.

В этом случае или $a = -b^{2^{l-1}} c^{2^l}$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a) = Z_2 \oplus Z_{2^{l-1}}$, *или* $l \geqslant 4$, $a = -b^{2^{l-1}} 2^{2^{l-2}} c^{2^l}$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* IV *типа*.

4. $\xi_4 \notin R$, $T = 2$ *и* $\sqrt{-2} \in R$.

В этом случае $l = 3$, $a = -b^2 c^8$, $4 b^2 \notin R^4$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* I *типа*.

5. $\xi_4 \notin R$, $T > 2$, $\xi_4(\xi_{2^{T+1}} + \xi_{2^{T+1}}^{-1}) \notin R$ *и* $l \leqslant T + 1$.

В *этом случае* $l = T + 1$ *тогда и только тогда, когда*
$a = -(2 + \xi_{2T} + \xi_{2T}^{-1})\, c^{2^l}$ *или* $a = -(2 + \xi_{2T} + \xi_{2T}^{-1})^2 (2 + \xi_{2T} + \xi_{2T}^{-1})^{2^{l-2}} c^2$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* III *типа. Если* $l < T + 1$, *тогда* $a = -b^2 c^{2^l}$, $b^2 \notin R^4$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* II *типи*.

6. $T > 2$, $\xi_4(\xi_{2T+1} + \xi_{2T}^{-1}) \in R$ *и* $l \leqslant T + 1$.

В этом случае $l = T + 1$ *тогда и только тогда. когда*
$a = -b^2 (2 + \xi_{2T} + \xi_{2T}^{-1})^{2^{l-2}} c^{2^l}$ *или* $a = -b^2 c^{2^l}$, $b^2 \notin R^4$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* I *типа. Если* $l < T + 1$, *тогда* $a = -b^2 c^{2^l}$, $b^2 \notin R^4$ *и* $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* II *типа*.

7. $T = \infty$, $a = -b^2 c^{2^l}$ *и* $b^2 \notin R^4$.

В этом случае $\mathrm{Gal}(t^{2^l} - a)$ *есть группа* II *типа*.

Тбилисский государственный университет

(Поступило 25.10.1985)

მათემატიკა

ბ. მესაბლიშვილი

ბმული კომუტატიური რგოლის რადიკალური გაფართოების სეპარაბელური ქვეალგებრების სტრუქტურა

რეზიუმე

მიღებულია ოროსკოსა და ველეზის [1] შედეგების განზოგადება ბმული კომუტაციური რგოლის შემთხვევაში.

MATHEMATICS

B. N. MESABLISHVILI

THE LATTICE OF SEPARABLE SUBALGEBRAS OF A RADICAL EXTENSION OF A CONNECTED COMMUTATIVE RING

Summary

The results of M. A. de Orosco and W. Y. Velez [1] are generalized for the case of a connected commutative ring.

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. M. A. De Orosco, W. Y. Velez. J. Number Theory, 15, 1982, 388-405
2. G. J. Janusz. Trans. AMS, 122, 1966, 461-479.
3. M. Norris, W. Y. Velez. Acta Arith., 38, 1980, 111-115.